Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2024/25 уч.г.
Математика, 9 класс, решения

Время выполнения 235 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

Все задания по 7 баллов

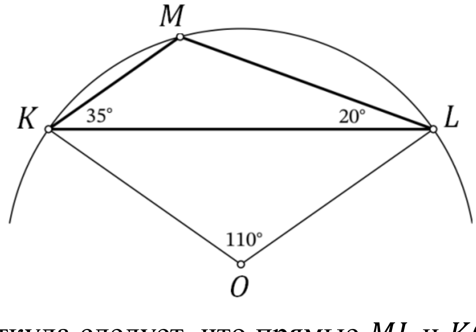
Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям

9.1. Найдите наибольшее тринадцатизначное натуральное число, делящееся на 75, в записи которого встречаются все 10 цифр.
Ответ. 9999876432150.
Решение. Число делится на 3 и на 25. Сумма десяти цифр равна 45 (делится на 3), так что три дополнительные цифры в записи числа в сумме должны дать $0, 3, 6, \ldots, 27$. Чем старше разряд, тем большую цифру лучше в него ставить, поэтому возьмём три девятки и начнём число так: $9999\ldots$. Чтобы число делилось на 25, нужно, чтобы в конце числа стояло 25, 50, или 75. Пятёрка используется в любом случае, и лучше всего выбрать 50, чтобы оставить для старших разрядов не 0, а 7 и 2. В итоге получаем число 9999876432150.
Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Задача верно решена для десятизначного числа – 4 балла. Приведён только верный ответ – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

9.2. Точка O – центр описанной окружности треугольника KLM с углами $\angle K = 35^\circ$, $\angle L = 20^\circ$ и $\angle M = 125^\circ$. Докажите, что точки K, L, M, O являются вершинами трапеции.



Решение. Ясно, что раз угол M треугольника тупой, то точки M и O лежат по разные стороны от прямой KL. Центральный угол LOK, соответствующий вписанному углу LMK, равен 250°. Внутренний угол интересующего нас четырёхугольника дополняет его до 360° и равен 110°. Так как треугольник LOK равнобедренный, углы KLO и LKO равны по $90^\circ - \frac{110^\circ}{2} = 35^\circ$. Теперь можно заметить, что углы MKL и KLO равны по 35° и являются накрест лежащими при прямых MK и LO и секущей KL, то есть прямые MK и LO параллельны. С другой стороны, углы MLK и LKO не равны, откуда следует, что прямые ML и KO не параллельны. Это означает, что $OKLM$ – трапеция (и не параллелограмм).

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – до 5 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1-2 балла. За отсутствие доказательства того, что $OKML$ не является параллелограммом, снижать на 1 балл.*

9.3. Квадратное уравнение $x^2+ax+b=0$ с целыми коэффициентами a и b имеет два корня $\left(\frac{1}{k}-2\right)$ и $\left(\frac{1}{m}-2\right)$, где k, m – различные целые числа. Найдите все значения, которые могут принимать a и b.
Ответ. $a=4$, $b=3$.
Решение. Числа $\frac{1}{k}-2$ и $\frac{1}{m}-2$ являются рациональными. По теореме Виета имеем:
$$\frac{1}{k}-2+\frac{1}{m}-2=-a\in\mathbb{Z};\qquad \left(\frac{1}{k}-2\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)=b\in\mathbb{Z}.$$
Из первого уравнения следует, что $k+m=(4-a)km$. Тогда из второго уравнения имеем:
$$\frac{1-2(k+m)}{km}=b-4\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1-2(4-a)km}{km}=b-4\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad\frac{1}{km}-2(4-a)=b-4\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{km}=b-2a+4\in\mathbb{Z}.$$
Значит, $km=\pm1$, следовательно, так как они целые и различные, то либо $k=1$, $m=-1$, либо $k=-1$, $m=1$. То есть -3 и -1 – корни квадратного трехчлена. Тогда по теореме Виета: $a=4$, $b=3$.
Комментарий. *Любое верное обоснованное решение – 7 баллов. Задача сведена к анализу уравнения* $\frac{1}{km}=b-2a+4$ *в целых числах, но дальнейшие продвижения отсутствуют – 4 балла. За арифметические ошибки при верных рассуждениях снижать на 2 балла. Приведён только верный ответ – 0 баллов.*

9.4. В первой строке подряд выписаны числа от 500 до 1499 в некотором порядке. Под каждым числом первой строки, кроме самого левого, напишем НОД (наибольший общий делитель) этого числа и его левого соседа. Из полученной таким образом второй строки, состоящей из 999 чисел, аналогично получаем третью строку, состоящую из 998 чисел: под каждым числом второй строки (кроме самого левого) напишем НОД этого числа и его левого соседа и т.д. Этот процесс продолжается до появления строки, состоящей из единиц. Какое наибольшее количество строк может быть выписано?
Ответ. 501.
Решение. *Оценка.* Докажем, что в 501-й строке все числа уже равны 1. В самом деле, если в ней есть число $d\neq1$, то в 500-й строке есть два числа, кратных d, в 499-й – три таких числа, …, в первой строке есть 501 такое число. Но ни у одного числа d нет такого количества кратных среди 1000 подряд идущих чисел. Таким образом, больше 501 строки получить нельзя. *Пример.* Расположим в первой строке сначала 500 чётных чисел, а затем 500 нечётных. НОД двух чётных чисел также чётен, поэтому в каждой новой строке количество чисел уменьшается на единицу. Следовательно, в 500-й строке останется чётное число, поэтому процесс остановится после 501-й строки.
Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Получена оценка – 4 балла, приведён и обоснован пример – 3 балла, баллы суммируются. Верный пример без обоснования – 2 балла. За рассмотрение неоптимальных примеров баллы не начисляются. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

9.5. Среди чисел от 10000 до 999999 Вася выбрал числа-палиндромы с нечётной суммой цифр, а Петя – числа-палиндромы с чётной суммой цифр. У кого из мальчиков оказалось больше чисел и во сколько раз? (Числа-палиндромы читаются одинаково как слева направо, так и справа налево, например, 11011.)
Ответ. У Пети больше в 3 раза.
Решение. Заметим, что палиндром с 5 цифрами выглядит как $\overline{abcba}$, а с 6 цифрами – как $\overline{abccba}$. Каждый из этих палиндромов однозначно восстанавливается по первым трём цифрам $\overline{abc}$. Это означает, что и палиндромов с 5 цифрами, и палиндромов с 6 цифрами столько же, сколько чисел $\overline{abc}$ от 100 до 999 (т. е. 900). Заметим, что любой палиндром с 6 цифрами имеет чётную сумму цифр $2(a+b+c)$. А сумма цифр палиндрома с 5 цифрами есть $2(a+b)+c$, т. е. зависит только от чётности цифры c. Значит, при любых фиксированных a и b существует пять (чётных) цифр c, для которых $2(a+b)+c$ чётно, и пять (нечётных) цифр c, для которых $2(a+b)+c$ нечётно. Поэтому палиндромов с 5 цифрами, у которых сумма цифр нечётна, столько же, сколько палиндромов с 5 цифрами, у которых сумма цифр чётна (их по 450). А значит, палиндромов с 5 цифрами, у которых сумма цифр нечётна, в 2 раза меньше, чем

палиндромов с 6 цифрами. Итак, палиндромов от 10000 до 999999 с чётной суммой цифр больше, чем с нечётной, причём ровно в 3 раза.

Замечание. *Доказать, что палиндромов с чётной суммой цифр больше, можно, установив взаимно однозначное соответствие между пятизначными и шестизначными палиндромами. Например, это можно сделать, сопоставив каждому пятизначному палиндрому* $\overline{abcba}$ *шестизначный палиндром* $\overline{abccba}$. *При этом у всех шестизначных палиндромов сумма цифр чётна, а среди пятизначных есть палиндромы с нечётной суммой цифр.*

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Следующие критерии суммируются. Доказано, что палиндромов с* 5 *цифрами столько же, сколько палиндромов с* 6 *цифрами –* 2 *балла; доказано, что у палиндромов с* 6 *цифрами сумма цифр чётна –* 2 *балла; доказано, что количество палиндромов с* 5 *цифрами, у которых сумма цифр нечётна, равно количеству палиндромов с* 5 *цифрами, у которых сумма цифр нечётна –* 2 *балла; доказано, что палиндромов с чётной суммой цифр больше в 3 раза –* 1 *балл. Решение начато, есть некоторое продвижение – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*