Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2024/25 уч.г.
Математика, 7 класс, решения

Время выполнения 235 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

Все задания по 7 баллов

Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям

7.1. Замените разные буквы разными ненулевыми цифрами, а одинаковые буквы – одинаковыми ненулевыми цифрами так, чтобы получилось верное равенство:

$$\text{Т} \times \text{Р} \times \text{И} \times \text{Д} \times \text{В} \times \text{А} = \text{О} \times \text{Д} \times \text{И} \times \text{Н}.$$

Ответ. Например, если взять $\text{Т} = 4$, $\text{Р} = 6$, $\text{В} = 3$, $\text{А} = 1$, $\text{О} = 8$, $\text{Н} = 9$, $\text{Д} = 5$, $\text{И} = 7$, тогда

$$4 \times 6 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1 = 8 \times 5 \times 7 \times 9.$$

Комментарий. *Любой верный пример – 7 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 1 балл. Приведён пример, в котором Д=0 – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

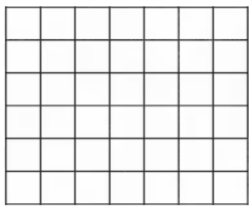
7.2. Число n называется загадочным, если число, образованное любыми двумя подряд идущими цифрами из записи числа n (в том же порядке, в котором они стоят в числе), делится на 13. Найдите количество загадочных пятизначных чисел.

Ответ. 6.

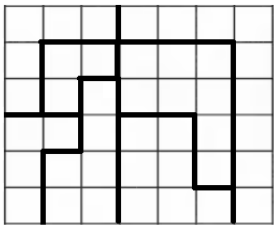
Решение. В загадочном числе после 1 может идти только 3, после 3 – только 9, после 9 – только 1. После 2 – только 6, затем 5, затем – снова 2. После 7 – только 8, а после 8 и 4 не может быть ничего. Таким образом, существует всего шесть пятизначных загадочных чисел: 13913, 39139, 91391, 26526, 65265, 52652.

Комментарий. *Полное решение задачи – 7 баллов. Найдены допустимые комбинации цифр, но получен неверный ответ – 3 балла. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

7.3. Миша нарисовал в тетради прямоугольник 7×6, а затем разрезал его по линиям сетки на 7 шестиугольников, площади которых являются последовательными натуральными числами. Покажите, как он мог это сделать.



Ответ. Можно заметить, что $7 \times 6 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$. На рисунке приведён пример возможного разрезания.



Комментарий. *Приведён верный пример – 7 баллов. Верный рисунок является достаточным обоснованием ответа, за отсутствие пояснений баллы не снимать. Замечено, что* $7 \times 6 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$*, однако дальнейших продвижений нет – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

7.4. В 7А классе 26 учеников. В школьном журнале все дети выписаны в алфавитном порядке их фамилий, а имя Катя встречается нечётное число раз. Оказалось, что номер первой Кати в журнале равняется количеству Кать в классе, а номер третьей Кати в три раза больше. Кроме того, для любой Кати есть Катя в соседней строчке. Найдите все возможные наборы номеров Кать в журнале.

Ответ. 1) 5, 6, 15, 16, 17; 2) 7, 8, 21, 22, 23, 24, 25; 3) 7, 8, 21, 22, 23, 25, 26; 4) 7, 8, 21, 22, 24, 25, 26.

Решение. Пусть x – количество Кать в классе, по условию $x \geq 3$. Если Кать хотя бы 9, то номер последней Кати не меньше $9 \times 3 = 27 > 26$, поэтому $x \leq 8$. Так как количество Кать – нечётное, то $x \leq 7$. Таким образом, Кать в классе $x = \{3, 5, 7\}$. Если $x = 3$, то номер первой Кати – 3, номер второй Кати – 4 (так как у первой Кати должна быть Катя в соседней строке), а номер третьей Кати – 9. Получили противоречие: у последней Кати нет Кати в соседней строке. Если $x = 5$, то номер первой Кати – 5, номер второй Кати – 6, номер третьей Кати – 15, тогда номер четвёртой – 16 и так как у последней, пятой Кати должна быть соседняя Катя, то ее номер – 17. Если $x = 7$, то номер первой Кати – 7, номер второй Кати – 8, номер третьей Кати – 21, номер четвёртой – 22. Если пятая Катя стоит 23-й, то шестая – 24-й или 25-й, а седьмая – 25-й или 26-й соответственно. Если пятая Катя стоит 24-й, то возможен единственный случай: шестая – 25-я, седьмая – 26-я. Таким образом, имеем 4 варианта.

Комментарий. *Следующие критерии суммируются. За каждый верный ответ ставить по 1 баллу; доказано, что других вариантов нет – 3 балла. Решение начато, есть некоторое продвижение – 1-2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

7.5. Клетки таблицы 3×5 заполнены цифрами так, как показано на рисунке. Вася ставит в одну из клеток таблицы фишку, а затем начинает перемещать её. При этом фишку можно перемещать в любую соседнюю по стороне клетку, но не разрешается посещать одну и ту же клетку дважды. Какое наибольшее число, составленное из цифр в порядке обхода, мог получить Вася?

6	4	1	3	5
9	7	9	8	9
5	3	2	4	6

Ответ. 897964135964235.

Решение. Число будет наибольшим, если удастся обойти все клетки таблицы. Докажем, что начиная с цифры 9, это сделать нельзя. Покрасим все клетки таблицы в шахматном порядке, получим 8 чёрных и 7 белых клеток. Так как при движении в соседнюю по стороне клетку цвета клеток чередуются, то если стартовать с белой клетки, то нельзя обойти больше 14 клеток, поэтому получим максимум четырнадцатизначное число. Итак, необходимо начать с чёрной клетки. Число будет наибольшим, если первая цифра наибольшая из возможных, т.е. 8. Вторая цифра – 9, если мы выберем 9, стоящую справа от стартовой цифры 8, то третья цифра максимум 6, значит, выбираем 9 слева от стартовой 8, затем выбираем её максимального соседа – 7. Далее выбираем максимального соседа – 9, затем максимального – 6 и теперь маршрут определяется однозначно

6	4	1	3	5
9	7	9	8	9
5	3	2	4	6

$$4 - 1 - 3 - 5 - 9 - 6 - 4 - 2 - 3 - 5.$$

Комментарий. *Полное верное решение – 7 баллов. Доказано, почему нельзя, начиная с цифры 9, получить маршрут длины 15 – 4 балла; приведён верный пример – 3 балла, баллы суммируются. Доказано, что нужно начинать с цифры 8, но при этом следующим шагом выбрана «правая» цифра 9 – снимать 2 балла. Решение начато, есть некоторое продвижение – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*