Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2024/25 уч.г.
Математика, 11 класс, решения

Время выполнения 235 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

Все задания по 7 баллов

Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

***Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям**

11.1. Случайным образом выбрали число от 1 до 2024. Найдите вероятность того, что выбрано число, все цифры которого меньше 5.

Ответ. $\frac{3}{23}$.

Решение. *Способ 1.* Сделаем все числа четырёхзначными, дополнив, если надо, нулями слева. Добавив 0000, посчитаем число кодов от 0000 до 2024. В каждом разряде, кроме первого слева, есть 5 вариантов. Поэтому кодов вида $0***$ и $1***$ будет по $5^3 = 125$, кодов вида $200*$, $201*$, $202*$ – по 5. Значит, всего имеем $2 \cdot 125 + 3 \cdot 5 = 265$ кодов, а чисел будет на одно меньше. Искомая вероятность равна $\frac{264}{2024} = \frac{3}{23}$.

Способ 2. Интересующий нас ряд можно считать рядом чисел $1, 2, \dots, n$ в пятеричной системе счисления. Тогда $n = 2024_5 = 2 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^1 + 4 = 264$.

Комментарий. *Любое полное решение задачи – 7 баллов. За каждую арифметическую ошибку снимается 2 балла. Приведён только ответ – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

11.2. Пусть $f(n)$ – наибольший нечётный делитель натурального числа n. Например, $f(35) = 35$, $f(108) = 9$, $f(256) = 1$. Вычислите значение суммы

$$f(117) + f(118) + \ldots + f(230) + f(231).$$

Ответ. 13427.

Решение. Наибольшие нечётные делители никаких двух из данных чисел не могут совпасть, так как числа с одинаковыми наибольшими нечётными делителями либо равны, либо отличаются минимум в 2 раза. Получается, что наибольшие нечётные делители чисел $117, 118, \dots, 230, 231$ отличаются друг от друга. Получается, что наибольшие нечётные делители чисел от $n + 1$ до $2n$ – это n различных нечётных чисел, которые не превышают $2n$. Следовательно, это числа $1, 3, 5, \dots, 2n - 1$. Если к набору чисел добавить число 232, то искомая сумма будет равна

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 231 - f(232) = \frac{1+231}{2} \cdot 116 - 29 = 116^2 - 29 = 13427.$$

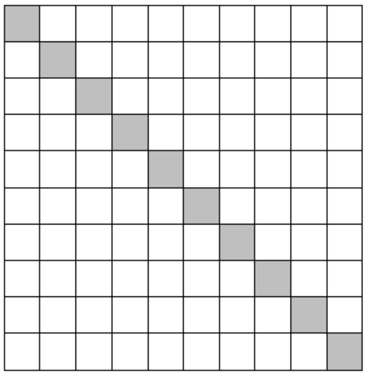
Комментарий. *Любое верное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности, включая арифметическую ошибку в вычислении последней суммы – до 5 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 2-3 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

11.3. Назовём прямую, пересекающую параболу $y = ax^2$ с вершиной в точке C в двух точках P и Q, особенной, если угол PCQ прямой. Докажите, что все особенные прямые проходят через одну точку.

Решение. Пусть $y = kx + b$ – уравнение особой прямой, проходящей через точки $P(x_1; ax_1^2)$, $Q(x_2; ax_2^2)$. Тогда, во-первых, x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 = kx + b$ и по теореме Виета их произведение равно $-\frac{b}{a}$. Во-вторых, из перпендикулярности векторов $\overrightarrow{CP} = (x_1; ax_1^2)$ и $\overrightarrow{CQ}(x_2; ax_2^2)$ следует равенство нулю их скалярного произведения, т.е. $x_1x_2 + a^2x_1^2x_2^2 = 0$, откуда с учётом условия $x_1x_2 = -\frac{b}{a}$. Значит, $ab = 1$. Это означает, что $b = \frac{1}{a}$, т.е. все особые прямые $y = kx + b$ проходят через точку $\left(0; \frac{1}{a}\right)$.

Комментарий. *Любое полное решение задачи – 7 баллов. Для приведенного решения следующие критерии суммируются. По теореме Виета записано произведение корней квадратного уравнения – 2 балла; получено условие $ab = 1$ – 3 балла; найдена искомая точка – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

11.4. В клетках квадрата 10×10 расставлены числа от 1 до 100 так, что соседние числа стоят в соседних клетках. Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел, расположенных в серых клетках (см. рисунок) ?



Ответ. 140.

Решение. *Оценка.* Раскрасим клетки таблицы в шахматном порядке. Если вписывать числа по порядку, то цвет и чётность будут синхронно чередоваться. Поэтому все чётные числа будут на одном цвете, все нечётные – на другом.

Рассмотрим числа $a_1 < a_2 < \dots < a_{10}$, стоящие на главной диагонали (конечно, на диагонали они могут стоять не по порядку). Эти числа одинаковой чётности, значит, они отличаются как минимум на 2. Поэтому

$$a_1 \geq 1, \;\; a_2 \geq 3, \;\; a_3 \geq 5, \dots, \;\; a_9 \geq 17.$$

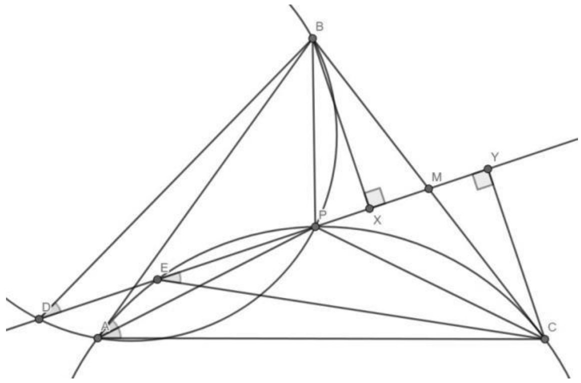
Докажем, что $a_{10} \geq 59$. Предположим, что мы вписывали числа в клетки доски в порядке их возрастания. Тогда в тот момент, когда мы вписывали на диагональ десятое число, покидаемая нами половина доски была заполнена (ибо мы в неё уже не вернёмся). Эта половина (включая диагональ) содержит 55 клеток: 30 белых и 25 чёрных. Но при заполнении доски белые и чёрные клетки чередуются. Поэтому к этому моменту были заполнены ещё как минимум четыре чёрные клетки в другой половине доски, т.е. всего заполнено не меньше 59 клеток. Имеем $1 + 3 + 5 + \dots + 17 + 59 = 140$.

Пример для суммы 140 изображен на рисунке.

1	2	43	44	45	46	47	48	49	50
100	3	42	41	40	39	38	37	36	51
99	4	5	6	31	32	33	34	35	52
98	97	96	7	30	29	28	27	26	53
93	94	95	8	9	10	23	24	25	54
92	91	90	89	88	11	22	21	20	55
83	84	85	86	87	12	13	14	19	56
82	81	80	79	78	77	76	15	18	57
69	70	71	72	73	74	75	16	17	58
68	67	66	65	64	63	62	61	60	59

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Получена оценка – 4 балла, приведён пример – 3 балла, баллы суммируются. За рассмотрение неоптимальных примеров баллы не начисляются. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

11.5. Точка M – середина стороны BC остроугольного треугольника ABC, внутри которого отмечена точка P так, что $\angle BAP = \angle CAP$. Около треугольников ABP и ACP описали окружности ω_1 и ω_2. Прямая MP пересекает окружность ω_1 в точке D, а ω_2 – в точке E, причем $DE = MP$. (Точка P лежит между точками M и E, а точка E – между точками P и D.) Докажите, что $BC = 2BP$.



Решение. *Способ 1.* Четырёхугольник $AEPC$ – вписанный, поэтому $\angle CAP = \angle CEP$. Аналогично четырёхугольник $BPAD$ – вписанный, поэтому $\angle BDP = \angle BAP = \angle CAP = \angle CEP$. Опустим высоты BX и CY на прямую MP. Заметим, что прямоугольные треугольники BMX и CMY равны по гипотенузе $BM = MC$ и острому углу $\angle BMX = \angle CMY$, откуда получаем $BX = CY$. Заметим, что прямоугольные треугольники CYE и BXD равны по катету $CY = BX$ и острому углу $\angle CEY = \angle CEP = \angle BDP = \angle BDX$, откуда получаем $YE = XD$. Тогда $0 = YE - XD = (YM + MP + PE) - (XP + PE + ED) = YM - XP$. Получается, что $XP = YM = XM$. Следовательно, в треугольнике BPM высота BX совпадает с медианой, поэтому он является равнобедренным, и $BP = BM = \frac{BC}{2}$, что и требовалось.

Способ 2. После равенства $\angle BDP = \angle CEP$ можно было закончить решение иначе. Можно доказать, что треугольники BDP и CEM равны, откуда и следует $BP = CM = \frac{BC}{2}$. По теореме синусов для треугольников BDM и CEM имеем

$$\frac{BD}{\sin\angle BMD} = \frac{BM}{\sin\angle BDM} = \frac{CM}{\sin\angle CEM} = \frac{CE}{\sin\angle CME}.$$

Поскольку $\angle BMD + \angle CME = 180^{\circ}$, получаем $BD = CE$. Тогда треугольники BDP и CEM равны по двум сторонам $BD = CE$, $DP = EM$ и углу между ними $\angle BDP = \angle CEM$.

Комментарий. *Любое полное решение задачи – 7 баллов. Корректно доказано, что треугольники BDP и CEM равны, но дальнейших продвижений нет – 6 баллов. Допущена ошибка в доказательстве равенства треугольников BDP и CEM, либо доказано, что $BD = CE$, но дальнейших продвижений нет – 3 балла. Доказано, что $\angle CEM = \angle PDB$, либо $\angle CAP = \angle CEM$, либо $\angle BAP = \angle BDP$, но дальнейших продвижений нет – 2 балла.*