Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2024/25 уч.г.
Физика, 11 класс, решения

Время выполнения 230 мин. Максимальное кол-во баллов – 50

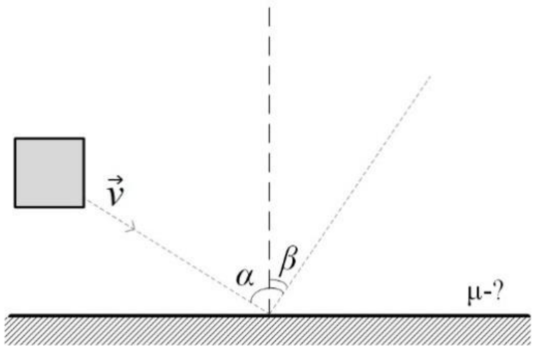
Каждая задача оценивается в 10 баллов

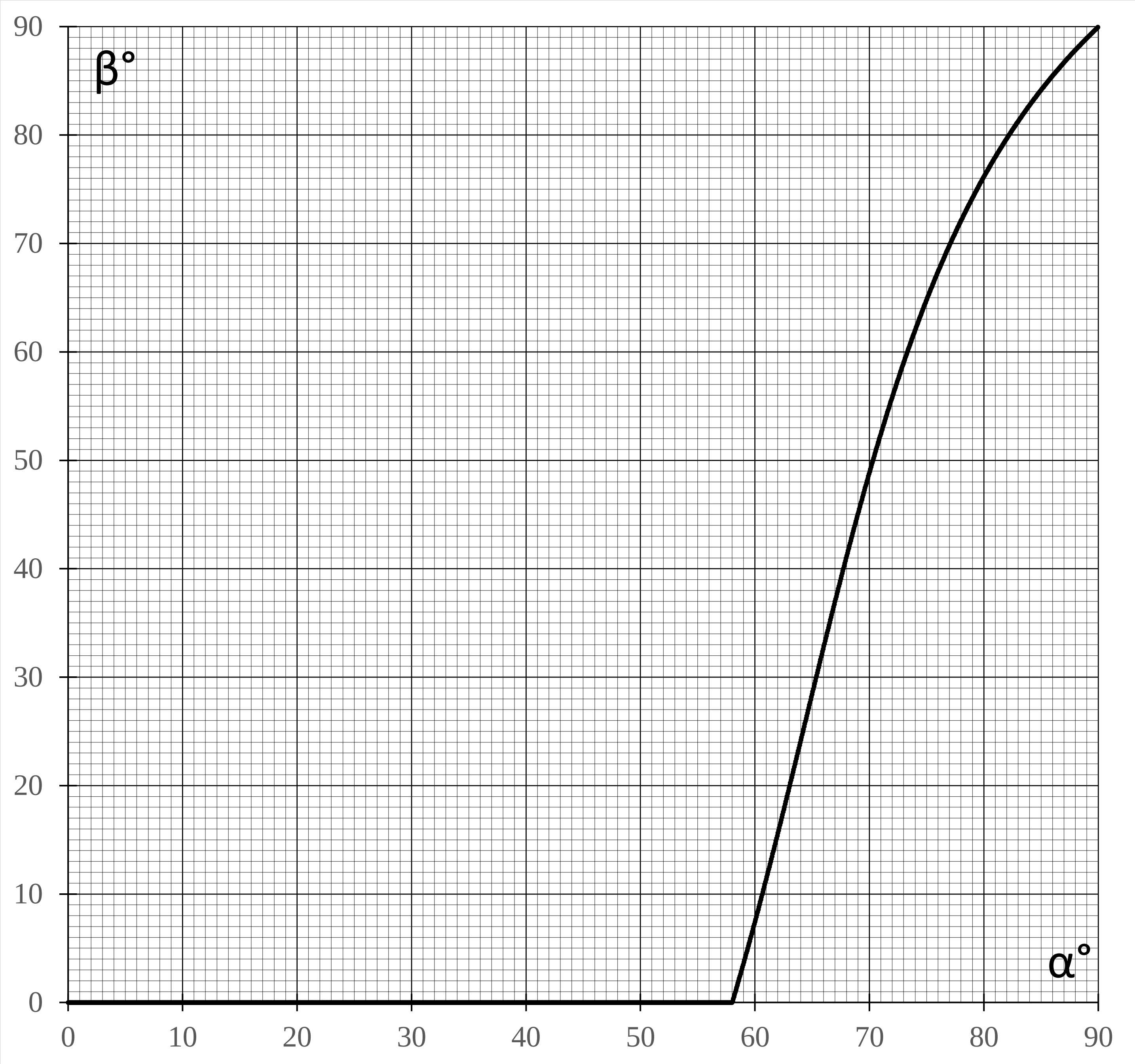
Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
10	Полное (верное) решение
7-9	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. Допущены арифметические ошибки, не влияющие на знак ответа
5-7	Задача решена частично, или даны ответы не на все вопросы
3-5	Решение содержит пробелы в обоснованиях, приведены не все необходимые для решения уравнения
1-2	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует

Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям. В таблицах после решений задач указана примерная разбалловка

Задача 1. Кубик падает под углом α на шероховатую стену (см. рис.). В процессе движения кубика к стенке одна из граней кубика остаётся параллельной стене. Стенка и кубик – абсолютно упругие тела. На отдельном листе приведён график зависимости угла отражения β от угла падения α. Используя график, определить коэффициент трения μ кубика о стену. Считать, что действие задачи протекает в условиях отсутствия гравитационного поля.





Ответ. $tg(\beta) = \begin{cases} tg(\alpha) - 2\mu, \ tg(\alpha) > 2\mu, \\ 0, \ tg(\alpha) \le 2\mu \end{cases} \Longrightarrow \mu = \frac{tg(\alpha_{crit})}{2} = \frac{tg(58^\circ \pm 0{,}5^\circ)}{2} \approx [0{,}785; 0{,}816] \approx 0{,}8 \pm 0{,}015$

Решение. Запишем изменение проекций импульса кубика по осям за малое время взаимодействия со стенкой (время удара Δt). Одна ось параллельна стенке, вторая перпендикулярна. Внешними силами по отношению к кубику являются силы трения и сила нормальной реакции со стороны стенки:

$$\begin{cases} -N\Delta t = -mv_{\text{к}} \cos\beta - mv\cos\alpha, \\ -\mu N\Delta t = mv_{\text{к}} \sin\beta - mv\sin\alpha\,. \end{cases}$$

Воспользуемся информацией о том, что стенка и кубик – абсолютно упругие тела, что в рамках задачи означает сохранение по величине проекции скорости кубика на ось перпендикулярную стенке: $mv_{\text{к}} \cos\beta = mv\cos\alpha$. Подставляя в систему выше получаем:

$$\begin{cases} -N\Delta t = -2mv\cos\alpha, \\ -\mu N\Delta t = mv_{\text{к}} \sin\beta - mv\sin\alpha = -2\mu mv\cos\alpha; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} mv_{\text{к}} \cos\beta = mv\cos\alpha, \\ mv_{\text{к}} \sin\beta = mv\sin\alpha - 2\mu mv\cos\alpha. \end{cases}$$

Поделив нижнее уравнение на верхнее, получаем:

$$tg\beta = tg\alpha - 2\mu.$$

Здесь нужно обратить внимание, что $tg\beta$ не может быть отрицательным. Случай, когда $tg\beta = 0$ соответствует полной потере кубиком проекции скорости на ось параллельную стенке из-за силы трения, после чего сила трения обращается также в ноль и больше не влияет на проекцию импульса вдоль стенки. Таким образом, имеем ответ: $tg(\beta) = \begin{cases} tg(\alpha) - 2\mu, \ tg(\alpha) > 2\mu, \\ 0, \ tg(\alpha) \le 2\mu \end{cases}.$

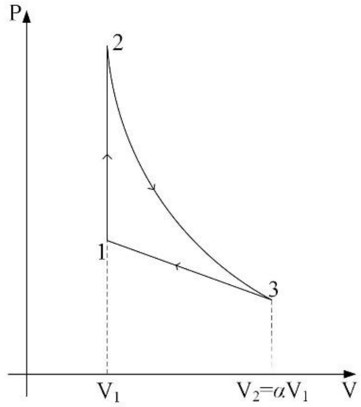
Чтобы найти коэффициент трения по графику, выберем на нём «пограничную» точку между двумя областями нашего решения. Эта точка соответствует углу $\alpha_{crit} = 58^{\circ} \pm 0{,}5^{\circ}$ с учётом погрешности в виде половины цены деления по горизонтальной оси. Приближённое вычисление даёт нам ответ: $\mu = \frac{tg(\alpha_{crit})}{2} \approx [0{,}785; 0{,}816]$.

Примерная разбалловка

	Этапы решения	Уравнения, условия	Баллы
1	Запись изменений проекций импульса по осям	$\begin{cases} -N\Delta t = -mv_к \cos\beta - mv\cos\alpha, \\ -\mu N\Delta t = mv_к \sin\beta - mv\sin\alpha\,. \end{cases}$	3+3
2	Неизменность по величине модуля проекции импульса на ось перп. стенке.	$mv_к \cos\beta = mv\cos\alpha.$	1
3	Получение итоговой зависимости	$tg(\beta) = \begin{cases} tg(\alpha) - 2\mu, & tg(\alpha) > 2\mu, \\ 0, & tg(\alpha) \le 2\mu \end{cases}$	2
4	Численный ответ из графика (любыми разумными рассуждениями)	$\mu = \dfrac{tg(\alpha_{crit})}{2} \approx [0{,}785; 0{,}816]$	1

Задача 2. Рабочим телом тепловой машины является один моль одноатомного идеального газа. За один рабочий цикл газ совершает работу $A = 2$ кДж. Цикл состоит из изохорного нагревания 1-2, политропного расширения 2-3 и процесса 3-1, в котором давление газа линейно зависит от его объёма (см. рис.). Найти молярную теплоёмкость газа в процессе 2-3, если известно, что $\frac{V_2}{V_1} = \alpha = 3$, $T_1 = T_3 = 300$ К и $T_2 = 700$ К. При каком значении параметра α процесс 2-3 был бы адиабатическим?

Примечание: политропным процессом называется термодинамический процесс, в течение которого теплоёмкость газа остаётся постоянной.



Ответ. $C = \frac{A + \frac{\nu R T_1}{2\alpha}(\alpha^2 - 1) + \frac{i}{2}\nu R(T_3 - T_2)}{\nu(T_3 - T_2)} = -0{,}845\,\frac{Дж}{моль\cdot К}$; $\alpha(C = 0) = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4}}{2} \approx 2{,}758$, где

$$\beta = \frac{-2A + i\nu R(T_1 - T_2)}{\nu R T_3}.$$

Решение. Тепло, подведённое к газу в процессе 2-3 по первому началу термодинамики:

$$Q_{23} = \nu C(T_3 - T_2) = A_{23} + \Delta U_{23} = A - A_{31} + \frac{i}{2}\nu R(T_3 - T_2).$$

Отметим, что $A_{31} < 0$. $A_{31} = (V_1 - V_2)\frac{(P_1 + P_3)}{2}$ (площадь под графиком процесса, трапеция), при этом, так как:

$$T_3 = T_1 \Longrightarrow P_3 V_2 = P_1 V_1 \Longrightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_3} = \alpha \Longrightarrow$$

$$A_{31} = (V_1 - V_2)\frac{(P_1 + P_3)}{2} = \frac{P_1 V_1(1 - \alpha)}{2}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\nu R T_1(1 - \alpha^2)}{2\alpha} \Longrightarrow$$

$$C = \frac{(A - A_{31})}{\nu(T_3 - T_2)} + \frac{i}{2}\nu R = \frac{(2A\alpha + \nu R T_1(\alpha^2 - 1))}{2\nu\alpha(T_3 - T_2)} + \frac{i}{2}R = -0{,}845\,\frac{Дж}{моль\cdot К}.$$

(тождественно равно ответу, указанному ранее).

Теперь найдём α при котором процесс 2-3 превращается в адиабату. Адиабата – политропный процесс с теплоёмкостью равной нулю. То есть:

$$C = 0 \Longrightarrow 2A\alpha + \nu RT_1(\alpha^2 - 1) = 2\nu\alpha(T_2 - T_3)\frac{i}{2}R.$$

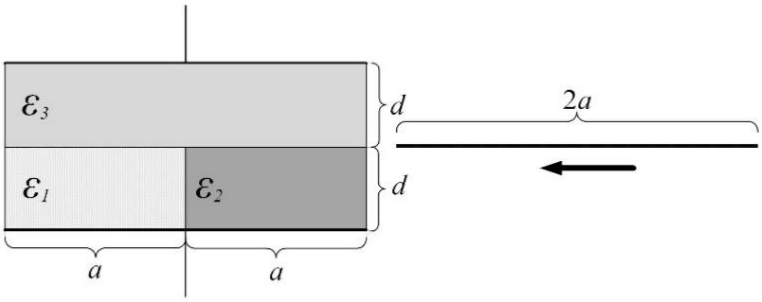
Решением этого уравнения относительно α будет: $\alpha(C = 0) = \frac{\beta+\sqrt{\beta^2+4}}{2} \approx 2{,}758$, где

$$\beta = \frac{-2A + i\nu R(T_2 - T_3)}{\nu RT_1}.$$

Примерная разбалловка

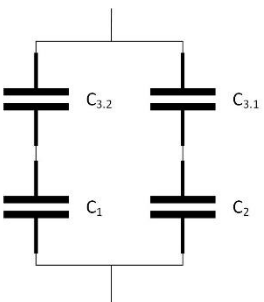
	Этапы решения	Уравнения, условия	Баллы
1	Определение молярной теплоёмкости	$Q_{23} = \nu C(T_3 - T_2)$	1
2	Первое начало термодинамики в процессе 2-3	$Q_{23} = A_{23} + \Delta U_{23} = A - A_{31} + \frac{i}{2}\nu R(T_3 - T_1)$	1+1
3	Связь P_1 и P_3	$\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_3} = \alpha$	2
4	Запись работы A_{31} как площади под графиком и её явное выражение	$A_{31} = (V_1 - V_2)\frac{(P_1 + P_3)}{2} = \frac{\nu RT_1(1 - \alpha^2)}{2\alpha}$	1+1
5	Получение выражения для теплоёмкости (или значения промежуточными подстановками)	$C = \frac{(2A\alpha + \nu RT_1(\alpha^2 - 1))}{2\nu\alpha(T_3 - T_2)} + \frac{i}{2}R$	1
6	Получение значения $\alpha(C = 0)$	$\alpha(C = 0) = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4}}{2} \approx 2{,}758$; $\beta = \frac{-2A + i\nu R(T_2 - T_3)}{\nu RT_1}$	2

Задача 3. Плоский конденсатор заполнен пластичными диэлектриками трёх видов так, как это показано на рисунке. Диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε_3 занимает половину объёма между прямоугольными обкладками конденсатора, диэлектрики с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 – по четверти объёма. Благодаря пластичности диэлектриков между ними можно вставить тонкую проводящую пластинку прямоугольной формы и такой же длины и ширины, как и обкладки конденсатора. Найти отношение ёмкостей конденсатора с полностью вставленной внутрь проводящей пластинкой и вовсе без неё. Диэлектрики имеют формы параллелепипедов.



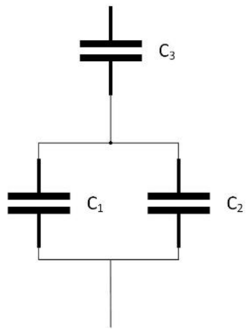
Ответ. $\frac{C_с}{C_{без}} = \frac{2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(\varepsilon_1+\varepsilon_3)(\varepsilon_2+\varepsilon_3)}{(2\varepsilon_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2)(2\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_3(\varepsilon_1+\varepsilon_2))}$.

Решение. Разница в ёмкостях возникает из-за того, что границы раздела между диэлектриками ε_1, ε_3 и ε_2, ε_3 имеют разный потенциал, когда между диэлектриками нет проводящей пластины. В этом случае



(отсутствия пластины между диэлектриками) эквивалентной схемой для вычисления ёмкости всего сложного конденсатора будет являться такая конфигурация (см. рис. слева). Где $C_1 = \frac{(\frac{S}{2})\varepsilon_1\varepsilon_0}{(\frac{d}{2})}$; $C_2 = \frac{(\frac{S}{2})\varepsilon_2\varepsilon_0}{(\frac{d}{2})}$; $C_{3.1} = C_{3.2} = \frac{(\frac{S}{2})\varepsilon_3\varepsilon_0}{(\frac{d}{2})}$. Дальнейший расчёт эквивалентной ёмкости приводит нас к таким выражениям:

$$C_{\text{без}} = \left(C_1{}^{-1} + C_{3.2}{}^{-1}\right)^{-1} + \left(C_2{}^{-1} + C_{3.1}{}^{-1}\right)^{-1} = \frac{S\varepsilon_0(2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\varepsilon_3{}^2)}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_3)(\varepsilon_2+\varepsilon_3)}.$$

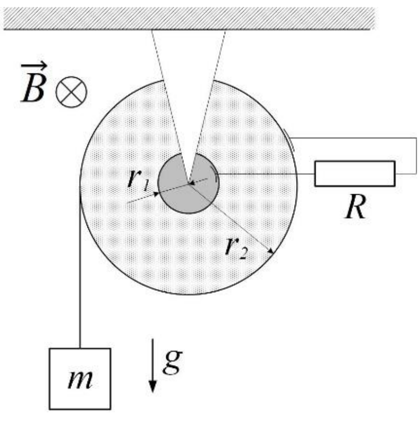


В случае же когда проводящая пластинка вставлена, то конденсаторы C_1 и C_2 оказываются подключены параллельно на эквивалентной схеме. Теперь обе пары их обкладок эквипотенциальны. Эквивалентная схема изображена справа. Здесь C_1 и C_1 рассчитываются аналогично предыдущему случаю, а $C_3 = \frac{S\varepsilon_3\varepsilon_0}{(\frac{d}{2})}$. Тогда эквивалентна ёмкость рассчитывается как: $C_{\text{с}} = ((C_1 + C_2)^{-1} + C_3{}^{-1})^{-1} = \frac{2S\varepsilon_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\varepsilon_3}{d(2\varepsilon_2+\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$. Из выражений для $C_{\text{с}}$ и $C_{\text{без}}$ легко получается ответ задачи.

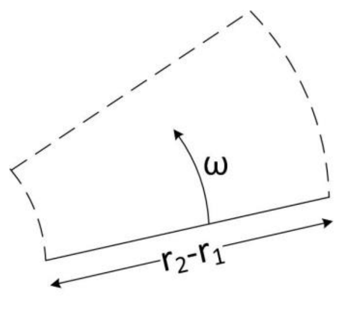
Примерная разбалловка

	Этапы решения	Уравнения, условия	Баллы
1	Физический обоснованна причина принципиальной разницы ёмкостей в двух случаях	Эквипотенциальность границы между диэлектриками при наличии пластины	3
2	Вычисление $C_{\text{без}}$	$C_{\text{без}} = \frac{S\varepsilon_0(2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\varepsilon_3{}^2)}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_3)(\varepsilon_2+\varepsilon_3)}$	3
3	Вычисление $C_{\text{с}}$	$C_{\text{с}} = \frac{2S\varepsilon_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\varepsilon_3}{d(2\varepsilon_2+\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$	3
4	Ответ для соотношения $\frac{C_{\text{с}}}{C_{\text{без}}}$	$\frac{C_{\text{с}}}{C_{\text{без}}} = \frac{2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(\varepsilon_1+\varepsilon_3)(\varepsilon_2+\varepsilon_3)}{(2\varepsilon_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2)(2\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_3(\varepsilon_1+\varepsilon_2))}$	1

Задача 4. Хорошо проводящую металлическую шайбу с внешним радиусом r_2 и внутренним радиусом r_1 закрепили на хорошо смазанной оси. Затем включили внешнее магнитное поле, вектор индукции $\vec{B}$ которого перпендикулярен плоскости шайбы, и подключили к внешнему и внутреннему ободам шайбы с помощью подвижных щёточных контактов резистор сопротивлением R (см. рис.). На шайбу намотали длинную невесомую и нерастяжимую нить и прикрепили к её свободному концу груз массой m. Далее груз отпускают. Найдите установившуюся угловую скорость вращения шайбы. Нить не проскальзывает по внешнему ободу шайбы и не слетает с него.



Ответ. $\omega = \frac{4mgRr_2}{B^2(r_2{}^2 - r_1{}^2)^2}$



Решение. Сначала необходимо определить зависимость ЭДС индукции между подвижными контактами. Это можно сделать, рассмотрев очень узкий сектор шайбы, как увеличивающийся со временем контур. Один радиус такого «виртуального контура» остаётся на месте, а второй «уезжает» от него с угловой скоростью ω (см. рис.). Тогда поток через такой контур от времени будет зависеть так:

$$\Phi(t) = BS(t) = \frac{B\omega t}{2}(r_2{}^2 - r_1{}^2),$$

где $S(t)$ – площадь сегмента диска (косинуса в потоке нет, потому что он равен единице, поле перпендикулярно плоскости шайбы). Откуда получаем величину ЭДС:

$$\left|-\frac{d\Phi(t)}{dt}\right| = \mathrm{E} = \frac{B\omega}{2}({r_2}^2 - {r_1}^2).$$

Аналогичное значение можно получить если рассмотреть фиксированный по размеру очень узкий сектор. ЭДС на его концах можно будет описать, как ЭДС, возникающую в проводящей палочке, двигающейся в магнитном поле, но немного сложнее из-за того, что скорости разных участков этого сектора не одинаковы, а растут по мере удаления от оси вращения. Просуммируем вклады в суммарную ЭДС от каждого маленько кусочка длины dr:

$$dE = \omega r B dr.$$

Видно, что функция слева от дифференциала линейная и серьёзно интегрировать тут не нужно, достаточно найти площадь под графиком $\omega r B$ от r_1 до r_2, то есть:

$$E = \frac{\omega {r_2}^2 B}{2} - \frac{\omega {r_1}^2 B}{2} = \frac{B\omega}{2}({r_2}^2 - {r_1}^2).$$

На создание этой ЭДС на резисторе R тратится энергия. Так как трения в оси шайбы нет, то, когда угловая скорость установиться – тепловые потери на резисторе будут единственным диссипативным процессом, куда может теряться потенциальная энергия груза. Запишем связь между скоростью груза и угловой скоростью шайбы: $v = \omega r_2$. Тогда равенство мощности, развиваемой силой тяжести груза и мощности тепловых потерь будет выглядеть так (условие на то, что угловая скорость больше не увеличивается):

$$mgv = \frac{E^2}{R} \Rightarrow mg\omega r_2 = \frac{B^2\omega^2}{4R}({r_2}^2 - {r_1}^2)^2.$$

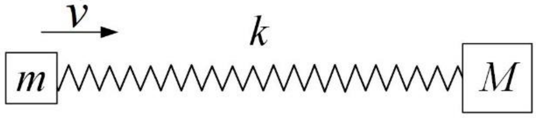
Откуда получаем: $\omega = \frac{4mgRr_2}{B^2({r_2}^2 - {r_1}^2)^2}$.

Также возможен вариант описания условия установившейся угловой скорости через запись равенства нулю суммы моментов силы натяжения нити (равной силе тяжести при установившейся скорости) и силы Ампера, действующей на ток в шайбе.

Примерная разбалловка

	Этапы решения	Уравнения, условия	Баллы
1	Обоснованное нахождение величины ЭДС индукции между внутренним и внешним ободами шайбы	$\mathrm{E} = \frac{B\omega}{2}({r_2}^2 - {r_1}^2)$	4
2	Описание условия **и** запись уравнения на него, обеспечивающего постоянство скорости (энергии или моменты)	$mg\omega r_2 = \frac{B^2\omega^2}{4R}({r_2}^2 - {r_1}^2)^2$	2+2
3	Правильный ответ	$\omega = \frac{4mgRr_2}{B^2({r_2}^2 - {r_1}^2)^2}$	2

Задача 5. Два груза, массами m и M, соединены лёгкой пружиной жёсткостью k и покоятся на гладкой горизонтальной поверхности. Грузу массой m придают скорость величины v в направлении второго груза, вдоль пружины. Найти величину максимального удлинения пружины и минимальное время от момента начала движения, через которое максимальное удлинение будет достигнуто. На рисунке приведён вид на поверхность сверху.



Ответ. $\Delta l_{max} = v\sqrt{\frac{mM}{k(M+m)}}$; $T_{\Delta l_{max}} = \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}$

Решение. В задаче нет внешних сил для системы «$M +$ пружина $+ m$» с ненулевыми проекциями на горизонтальную плоскость. Это означает, что после начала движения скорость центра масс системы будет постоянной, а система отсчёта, связанная с центром масс – инерциальной. Найдём скорость центра масс:

$$\frac{\sum_i m_i \vec{v_i}}{\sum_i m_i} = \vec{V}_{\text{ц.м.}} = \frac{m\vec{v}}{m+M}; V_{\text{ц.м.}} = \frac{mv}{m+M}.$$

Перейдём в систему отсчёта, связанную с центром масс. В ней скорости грузов будут:

$$\overrightarrow{v'}_{0m} = \vec{v} - \vec{V}_{\text{ц.м.}} = \frac{M\vec{v}}{m+M};\ \overrightarrow{v'}_{0M} = \vec{0} - \vec{V}_{\text{ц.м.}} = -\frac{m\vec{v}}{m+M}.$$

В этой системе отсчёта колебания будут происходить около покоящегося центра масс. То есть, колебания каждого из грузов можно описывать как колебания груза на более короткой пружине, закреплённой одним концом в центре масс, а вторым на грузе. Длина недеформированной пружины между центром масс и грузом m:

$$l_{m\text{эфф}} = \left|\frac{\sum_i m_i \vec{r_i}}{\sum_i m_i}\right| = \left|\vec{R}_{\text{ц.м.}}\right| = \frac{Ml}{m+M},$$

где l – длина пружины. Для второго груза аналогичная эффективная длина пружины: $l_{M\text{эфф}} = \frac{ml}{m+M}$.

Жёсткости таких «укороченных» пружин выше во столько раз, во сколько они короче изначальной пружины (при том же усилии деформация меньше пропорционально длине). Таким образом:

$$k_{m\text{эфф}} = \frac{k}{l/l_{m\text{эфф}}} = \frac{k}{l/\frac{Ml}{m+M}} = \left(1+\frac{m}{M}\right)k;\ k_{M\text{эфф}} = \frac{k}{l/l_{M\text{эфф}}} = \frac{k}{l/\frac{ml}{m+M}} = \left(1+\frac{M}{m}\right)k.$$

Тогда частоты колебаний грузов относительно центра масс:

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k_{m\text{эфф}}}{m}} = \sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} = \omega_M = \sqrt{\frac{k_{M\text{эфф}}}{M}}.$$

Зная начальные скорости (максимальные в с. о. связанной с центром масс), можно найти максимальные отклонения от начального положения:

$$\Delta l_{mmax} = \frac{\left|\overrightarrow{v'}_{0m}\right|}{\omega_m} = \frac{Mv}{m+M}\sqrt{\frac{Mm}{k(m+M)}};\ \Delta l_{Mmax} = \frac{\left|\overrightarrow{v'}_{0M}\right|}{\omega_M} = \frac{mv}{m+M}\sqrt{\frac{Mm}{k(m+M)}}.$$

Так как частоты колебаний грузов одинаковы, то и своих максимальных отклонений они будут достигать за одно и то же время. В данной задаче в первый раз через $3/4$ периода от начала движения, так как чтоб достичь максимального удлинения пружины при данной в задаче начальной скорости грузам придётся 1 раз вернуться в стартовое положение равновесия (полпериода), а затем ещё достичь координаты с максимальным отклонением от равновесия (ещё четверть периода). Таким образом получаем ответы:

$$\Delta l_{max} = \Delta l_{mmax} + \Delta l_{Mmax} = v\sqrt{\frac{Mm}{k(m+M)}};\ T_{\Delta l_{max}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega_m} = \frac{3}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega_M} = \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}.$$

Примерная разбалловка

	Этапы решения	Уравнения, условия	Баллы
1	Обоснование удобства и поиск скоростей в с. о. ц. м.	$\overrightarrow{v'}_{0m} = \vec{v} - \vec{V}_{\text{ц.м.}} = \frac{M\vec{v}}{m+M};\ \overrightarrow{v'}_{0M} = \vec{0} - \vec{V}_{\text{ц.м.}} = -\frac{m\vec{v}}{m+M}$	2(обосн.) + 2
2	Нахождение «эффективных» жесткостей, на которых происходят колебания	$k_{m\text{эфф}} = \left(1+\frac{m}{M}\right)k;\ k_{M\text{эфф}} = \left(1+\frac{M}{m}\right)k$	1+1
3	Частоты колебаний	$\omega_m = \sqrt{\frac{k_{m\text{эфф}}}{m}} = \sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} = \omega_M = \sqrt{\frac{k_{M\text{эфф}}}{M}}$	1
4	Нахождение максимальных деформаций и первого момента их достижения	$\Delta l_{max} = \Delta l_{mmax} + \Delta l_{Mmax} = v\sqrt{\frac{Mm}{k(m+M)}};$ $T_{\Delta l_{max}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega_m} = \frac{3}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega_M} = \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}$	2+1