Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2024/25 уч.г.
Математика, 10 класс, решения

Время выполнения 235 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

Все задания по 7 баллов

Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

***Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям**

10.1. Для какого наибольшего натурального n существует единственное натуральное k, удовлетворяющее неравенству $\frac{5}{6} < \frac{k}{n} < \frac{6}{7}$?

Ответ. 84.

Решение. Запишем условие в виде $35n < 42k < 36n$. Легко видеть, что $n = 84$ удовлетворяет условию, так как неравенство принимает вид $70 \cdot 42 < 42k < 72 \cdot 42$, а между $70 \cdot 42$ и $72 \cdot 42$ находится единственное число, делящееся на 42, а именно $71 \cdot 42$. Докажем, что n не может быть больше 84. Если $n \geq 85$, то величина промежутка не меньше $36 \cdot 85 - 35 \cdot 85 - 1 = 84$, а в таком промежутке содержится не меньше двух чисел, кратных 42.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Следующие критерии суммируются. Найден ответ* $n = 84$*, и показано, что для него существует единственное натуральное* k *– 4 балла; доказано, что* n *не может быть больше* 84 *– 3 балла. Приведён только ответ – 0 баллов.*

10.2. Из выпуклого 12-угольника удалили три случайно выбранные стороны. Какова вероятность, что хотя бы одна вершина окажется изолированной (то есть не соединенной стороной ни с какой вершиной)?

Ответ. $\frac{27}{55}$.

Решение. Общее число вариантов равно $C_{12}^3 = 220$. Пусть удалены 3 последовательные стороны, таких вариантов 12. Пусть удалены 2 последовательные стороны, а третья сторона не примыкает ни к одной из них; таких вариантов $12 \cdot 8 = 96$. Искомая вероятность равна $\frac{12+96}{220} = \frac{27}{55}$.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Найдено общее число вариантов* (220) *– 2 балла. Найдено число благоприятных вариантов – 5 баллов. За каждую арифметическую ошибку снижать на 1 балл, за каждую комбинаторную – на 2-3 балла.*

10.3. К Новому году кондитерский магазин приготовил 300 подарочных наборов конфет. Использовалось несколько видов конфет, число конфет в наборе могло быть различным, но каждый набор включал в себя не больше 1 конфеты каждого вида. Все наборы были различны, то есть отличались хотя бы на одну конфету. Не было вида конфет, который был бы включен во все 300 наборов, но в любых двух наборах была одинаковая конфета. Какое наименьшее количество видов конфет могло быть использовано?

Ответ. 10.

Решение. Покажем, что 9 видов конфет не могло быть использовано. Из 9 конфет можно образовать $2^9 - 1 = 511$ различных наборов. При этом наборы образуют пары, дополняющие друг друга до всего множества из 9 конфет. Поскольку 300 больше половины 511, среди 300 наборов обязательно окажутся два набора, дополняющие друг друга до всего множества. Тогда нарушается условие: в любых двух наборах была одинаковая конфета. Если видов конфет 10, то 300 наборов, удовлетворяющих условию, можно составить, например, так: возьмём все наборы по 6 и по 7 конфет, их $C_{10}^6 + C_{10}^7 = 210 + 120 = 330$. Поскольку 6 и 7 больше половины 10, в любых двух наборах будет одинаковая конфета. Однако в наборах, например, $(1, 2, 3, 4, 5, 6), (1, 2, 7, 8, 9, 10), (5, 6, 7, 8, 9, 10)$ одинаковые конфеты $(1, 2)$, $(5, 6)$, $(7, 8, 9, 10)$, и нет общей конфеты в этих трёх наборах, поэтому нет общей конфеты и во всех 330 наборах. Остаётся взять 300 наборов из 330 (оставляя три набора, использованных в примере).

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Получена оценка – 4 балла, приведён пример – 3 балла, баллы суммируются. За рассмотрение неоптимальных примеров баллы не начисляются. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

10.4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, точка K – середина стороны BC. Докажите, что прямая KN касается окружности, описанной около треугольника ANM.

Решение. Обозначим точку пересечения высот H. Так как $\angle ANH = \angle AMH = 90°$, то четырехугольник $AMHN$ – вписанный и AH является диаметром окружности, описанной около треугольника ANM. Обозначим центр этой окружности O. Отсюда следует, что точки A, O, H лежат на одной прямой и эта прямая перпендикулярна BC (так как продолжение отрезка AH является третьей высотой). Поэтому $\angle NAO = 90° - \angle ABC$. Отрезки AO и ON равны, так как это радиусы одной окружности, следовательно, $\angle ANO = 90° - \angle ABC$. Тогда $\angle ONC = 90° - \angle ANO = \angle ABC$. Так как $\angle BNC = \angle BMC = 90°$, то четырехугольник $BNMC$ – вписанный, и BC является диаметром описанной окружности, а точка K – её центр. Следовательно, $KB = KN$, $\angle KNB = \angle NBK = \angle ABC$, $\angle CNK = 90° - \angle KNB = 90° - \angle ABC$. Таким образом, $\angle CNK = \angle ANO$. Отсюда следует, что $\angle ONK = \angle CNK + \angle ONC = 90° - \angle ABC + \angle ABC = 90°$. Следовательно, KN перпендикулярно радиусу ON, то есть KN касается окружности, описанной около треугольника ANM.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – до 6 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1-2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

10.5. Числа a, b, c положительны и удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + ab = 25, \\ a^2 + c^2 + ac = 49, \\ b^2 + c^2 + bc = 64. \end{cases}$$

Найдите величину $ab + bc + ac$.

Ответ. 40.

Решение. Построим треугольник ABC со сторонами $AB = 5$, $AC = 7, BC = 8$. Выберем в нём точку D. Обозначим расстояния DA, BD, DC как a, b, c. По теореме косинусов

$$25 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\angle ADB,$$
$$49 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\angle ADC,$$
$$64 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\angle BDC.$$

Отсюда $-2ab \cdot \cos\angle ADB = 25 - a^2 - b^2 = ab$, и $\cos\angle ADB = \frac{ab}{-2ab} = -\frac{1}{2}$. Значит, $\angle ADB = 120°$. Аналогично $\angle ADC = \angle BDC = 120°$. Площадь треугольника

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}(ab + bc + ac) \cdot \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{4}(ab + bc + ac).$$

По формуле Герона $S_{ABC} = \sqrt{10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} = 10\sqrt{3}$. Приравнивая, получаем $ab + bc + ac = 40$.

Замечание. $a = \frac{25}{\sqrt{129}}, b = \frac{40}{\sqrt{129}}, c = \frac{64}{\sqrt{129}}$.

Комментарий. *Любое верное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – до 5 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1-2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*