

11 КЛАСС

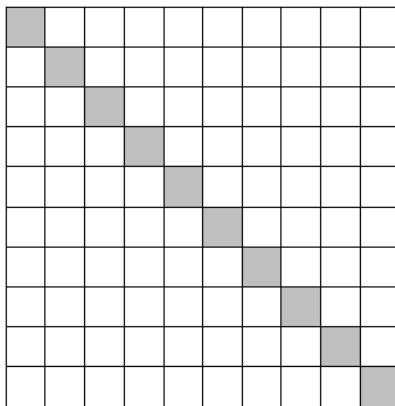
Максимальное время выполнения заданий: 235 мин.
Все задания по 7 баллов.

11.1. Случайным образом выбрали число от 1 до 2024. Найдите вероятность того, что выбрано число, все цифры которого меньше 5.

11.2. Пусть $f(n)$ – наибольший нечётный делитель натурального числа n . Например, $f(35) = 35$, $f(108) = 9$, $f(256) = 1$. Вычислите значение суммы
$$f(117) + f(118) + \dots + f(230) + f(231).$$

11.3. Назовём прямую, пересекающую параболу $y = ax^2$ с вершиной в точке C в двух точках P и Q , особенной, если угол PCQ прямой. Докажите, что все особенные прямые проходят через одну точку.

11.4. В клетках квадрата 10×10 расставлены числа от 1 до 100 так, что соседние числа стоят в соседних клетках. Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел, расположенных в серых клетках (см. рисунок) ?



11.5. Точка M – середина стороны BC остроугольного треугольника ABC , внутри которого отмечена точка P так, что $\angle BAP = \angle CAP$. Около треугольников ABP и ACP описали окружности ω_1 и ω_2 . Прямая MP пересекает окружность ω_1 в точке D , а ω_2 – в точке E , причем $DE = MP$. (Точка P лежит между точками M и E , а точка E – между точками P и D .) Докажите, что $BC = 2BP$.