№1

10-18

№1 – 7б
№2 – 1б
№3 – 3б
№4 – 6б
№5 – 2б

22б

1) Рассмотрим первую строку:

$a_1 = 3$, $a_7 = 143$, т.к.

$a_n = a_1 + d(n-1)$, то $a_7 = a_1 + 6d = 143 \Rightarrow$

$3 + 6d = 143 \Rightarrow d = 23\frac{1}{3}$; ~~т.к. $a \Rightarrow$~~

$a_4 = a_1 + 3d = \underline{73}$;

2) Рассмотрим седьмую строку:

$a_1 = 82$, $a_7 = 216 \Rightarrow$

$82 + 6d = 216 \Rightarrow d = 22\frac{1}{3} \Rightarrow a_4 = a_1 + 3d = \underline{149}$

3) Рассмотрим 4 столбец: $x = a_4$

$a_1 = 73$, $a_7 = 149 \Rightarrow$

$73d + 6d = 149 \Rightarrow d = 12\frac{2}{3} \Rightarrow a_4 = a_1 + 3d = 111$

Ответ: 111.

№3

Если рассматривать доску, как шахматную, то прямоугольники 2×1 должны занимать одновременно и черную, и белую клетки => черных и белых клеток должно быть равное кол-во. Значит, фишки нужно расставить так, чтобы они закрывали 3 черных и 3 белых клетки, но это невозможно, ~~т~~ т.к., поставив фишки на 3 клетки одного цвета, в других рядах можно закрыть лишь максимум 2 клетки другого цвета. Значит, замостить прямоугольниками невозможно.

№2

Каждая игра, сыгранная между участниками одной группы (д. и м.) приносит этой ~~команде~~ группе ровно 2 очка, вне зависимости от итога игры. Пусть девочек было n, а мальчиков — $9n$. Тогда после игр между девочками было получено $n(n-1)$ очков, а между мальчиками — $9n(9n-1)$ очков (формулы получены из основной формулы $f(n) = \frac{n(n-1)}{2}$, где n — кол-во человек, а $f(n)$ — кол-во игр между ними). Т.к. каждая девочка ещё сыграла с каждым мальчиком, то таких игр было $9n^2$. Пусть после этих игр мальчики получили x очков, а девочки — y, тогда $x+y = 18n^2$, а также у мальчиков всего сыграно — $9n(9n-1)+x$ ~~игр~~ очков, а y девочек — $n(n-1)+y$ ~~игр~~ очков. Из условия и полученных данных следует:

$$\begin{cases} 9n(9n-1)+x=4(n(n-1)+y) \\ x+y=18n^2 \end{cases}$$

$$x=18n^2-y$$

$$81n^2-9n+18n^2-y=4n^2-4n+4y$$

$$95n^2-5n=5y$$

$$19n^2-n=y$$

Нам нужно узнать, сколько очков вместе набрали девочки, то есть $n(n-1)+y$.

$$n(n-1)+y=n(n-1)+19n^2-n=20n^2-2n,$$

где n — кол-во девочек.

Ответ: $20n^2-2n$, где n — кол-во девочек.

№5

$$f(a)=a^3+a\cdot a^2+b\cdot a+c=a^3+a^3+b\cdot a=$$

$$=2a^3+ba+c=a^3$$

(1) $a^3+ab=-c$,

$$f(b)=b^3+ab^2+b\cdot b+c=b^3+ab^2+b^2+c=$$

$= b^3 + b^2(a+1) + c = b^3$

(2) $b^2 \cdot (a+1) \cancel{+c} = -c$

~~(1)=~~ Из выражений (1) и (2) видно:

$a^3 + ab = b^2(a+1)$

$b^2(a+1) - ab - a^3 = 0$

$D = a^2 + 4a^3(a+1) = a^2 + 4a^4 + 4a^3 =$

$= a^2(2a+1)^2$

$b_{1,2} = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2(2a+1)^2}}{2(a+1)} = \dfrac{a \pm |a(2a+1)|}{2(a+1)} = \dfrac{a \pm a(2a+1)}{2(a+1)}$

(4) $b_1 = \dfrac{a + a(2a+1)}{2(a+1)} = a$

(5) $b_2 = \dfrac{-2a^2}{2(a+1)}$

(4) $b = a$

Из (1) следует:

$a^3 + a^2 = -c$

$-a^2(a+1) = c$

(6) $\begin{cases} c = -a^2(a+1) \\ b = c \end{cases}$

(5) $b = -\dfrac{a^2}{a+1}$

Из (1) следует:

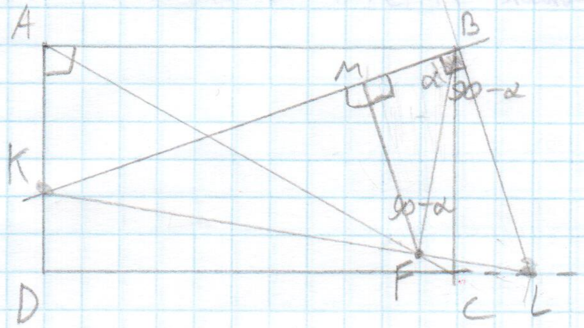
$a^3 - \dfrac{a^5}{a+1} = -c$

$c = -\dfrac{a^4}{a+1}$

(7) $\begin{cases} b = -\dfrac{a^2}{a+1} \\ c = -\dfrac{a^4}{a+1} \end{cases}$

Если соблюдается условие в системах (6) или (7), то условие задачи ($f(a) = a^3$ и $f(b) = b^3$) выполняется.

№4 10-18



1) Четырёхугольник можно вписать в окружность, если сумма противолежащих внут. углов равна 180°. Следовательно, исходя из того, что ∠A = 90°, нужно доказать, что ∠BFK тоже = 90°.

2) Д.п. Построим FM ∥ BL => ∠FMK = ∠LBK = 90°

3) △KMF и △KBL — прямоугольные
• ∠K — общий => △KMF ∼ △KBL

4) △MBF — прям.
Пусть ∠MBF — α°, тогда MFB — 90-α° =>
△MBF ∼ △KBL =>

5) △KMF ∼ △MBF, т.к. FM — высота KBF, то по свойству (высота треугольника, проведенная из прямого угла, делит его на 2 подобных △)

$\angle BFK$ — прямой $\Rightarrow$

четырехугольник $ABFK$ можно вписать в окружность.